できるだけ隙間のない物体の詰め方についての研究

青森県立五所川原高等学校　理数科２年　数学班
研究者名　湯澤一花　菊地海斗　丸一嘉也
指導教員　福士敬之　石田和久

1.　研究目的

課題を設定しようときっかけとなるものを調べていたところ，ポップコーンの容器を発見。その詰め具合を見て「もっと多く入っていれば満足できるのに」と考え，「できるだけ多く物を入れたい」という考えに変換。そこから今回の研究に至る。目的は，「効率的に物を入れ，持ち運ぶ回数を少なくする」というものである。なお，ここでは「効率がいい」を「ある一定の大きさの容器にできるだけ多くのものが入る」とする。

2.　方法

2-1　充填率とそれに関する用語の解説

・充填率

球の充填率とは，ある空間内で球が占める体積と，その空間の体積の比[1]と定義されている。

・ケプラー予想

ケプラー予想とは，ドイツの天文学者ヨハネス・ケプラーが1611年に提唱した，「無限に広がる3次元空間において，球を最も密に詰める方法は六方最密構造と立方最密構造であり，このときの充填率を超える配置はない」というものである。また，これらの配置での充填率は約74%となる。(ほぼ証明完了)

・最密充填

最密充填とは，先述したケプラー予想にて提唱された，無限に広がる3次元空間において急を最も密に詰められる充填方法であり，六方最密充填(図1)と立方最密充填(図2)の2つがある。

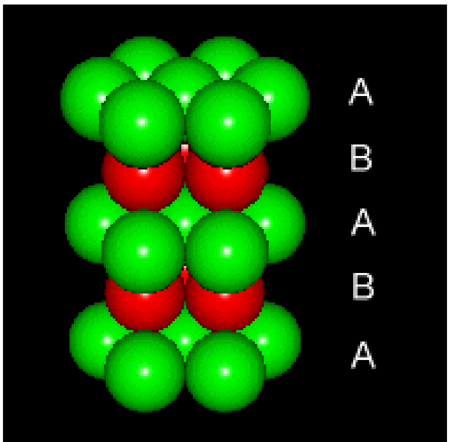


図1　六方最密構造[2]

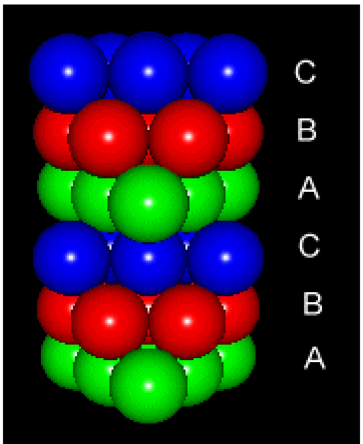


図2　立方最密構造[3]

2-2　実験方法

段ボール箱にテニスボールを詰め，適当に詰めたときと最密充填で詰めたときのボールが入った個数と充填率を比較する。なお，球は切らずに考え，段ボール箱とテニスボールの変形は考えないものとする。

① 適当に詰める

1. 段ボール箱にテニスボール100個を流し入れる。
2. 少しでも段ボール箱からはみ出たボールを取り除く。
3. 段ボール箱に残ったボールの個数を記録し，充填率を計算する。
4. 1～3を計100回繰り返し，平均値を求める。

② 最密充填で詰める

1. テニスボールを段ボール箱からはみ出ない高さまで詰める。
2. 並べる向きを変えて縦と横で2回ずつ記録をとり，充填率を記録する。
3. 六方最密充填と立方最密充填それぞれの平均値を求める。

2-3　実験器具

・テニスボール　半径 3.30 ㎝（公式規格）

・段ボール箱　23.8×39.8×28.8(㎝ ^{3})

3. 仮説１

最密充填が一番多くボールを詰められて，ケプラー予想によるとこのときの充填率は約 74%なので，それに近い値が出ると予想される。

4. 結果

結果は，以下の通りとなった。

表 1.適当に詰めた際の個数と充填率の平均値

個数の平均値(個)	85.7
充填率の平均値(%)	47.3

表 2.最密充填の個数と充填率の平均値

	六方最密充填	立方最密充填
個数の平均値(個)	99.5	95
充填率の平均値(%)	54.9	52.4

5. 考察１

実際に入った個数や充填率は，ケプラー予想から考えられる数値よりも少なかった。これは，実験のとき，一部でもはみ出た球は取り除くことにしていたためと考えられる。また，ケプラー予想は無限に広がる 3 次元空間という条件下での予想であり，容器の中の空間が有限である今回の実験では最密充填が最も効率のいい詰め方ではないことも考えられる。

6. 仮説２

実験の内容を踏まえて，充填率を求めるための一般化された式を求めることにした。しかし，3 次元での充填率を一般化しようとすると，変数が多く式が複雑になってしまう。そこで，まずは 2 次元で平面に円を敷き詰めた状態の密度を考え，それを応用して 3 次元へ展開していくことにした。

7. 考察２

7-1.六方構造

図 3 のような詰め方で，面積a×bの長方形に，半径rの円を最大x個詰められるように敷き詰める。以下，この詰め方を六方構造と呼ぶ。

aの方向に並べた円の個数をp(奇数行)，p'(偶数行)，bの方向に並べた円の個数をqとおく。

まず，aの方向について考えると，

奇数行は　$p=\left[\frac{a}{2r}\right]$([]はガウス記号)

偶数行は片側にrの隙間ができるので，　$p'=\left[\frac{a-r}{2r}\right]$

よって，aの範囲によって，p'は以下のように場合分けできる。

$2pr \le a \le 2pr + r$　のとき，p'=$p-1$…①

$2pr + r \le a < 2pr + 2r$　のとき，$p' = p$…②

次に，bの方向について考えると，図 3 より，　$q = \left[\frac{b-2r}{\sqrt{3}r}\right] + 1$

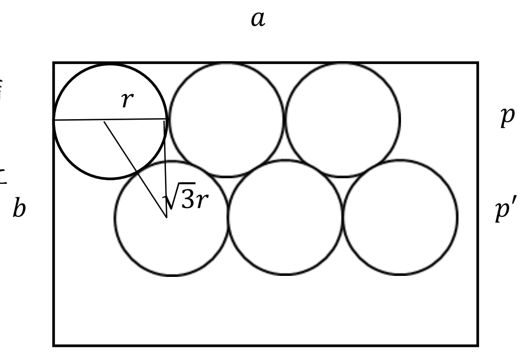


図 3　六方構造

よって，bの範囲は，　$\sqrt{3}qr+\left(2-\sqrt{3}\right)r \le b < \sqrt{3}qr+2r$…③

①，②，③より，長方形の面積の取りうる範囲は，以下のように示される。

$p'=p-1$　つまり　$2pr \le a \le 2pr+r$　のとき，

$2pr\left\{\sqrt{3}qr+\left(2-\sqrt{3}\right)r\right\} \le ab < (2pr+r)\left(\sqrt{3}qr+2r\right)$…④

$p'=p$　つまり　$2pr+r \le a < 2pr+2r$　のとき，

$(2pr+r)\left\{\sqrt{3}qr+\left(2-\sqrt{3}\right)r\right\} \le ab < (2pr+2r)\left(\sqrt{3}qr+2r\right)$…⑤

以上から，以下の 3 つの場合に分けて，六方構造での充填率を求める。

A.　④かつqが奇数であるとき，

円の個数は　$x=p\left(\frac{q+1}{2}\right)+(p-1)\left(\frac{q-1}{2}\right)$　となるので，充填率の取りうる範囲は

$$\frac{\left\{p\left(\frac{q+1}{2}\right)+(p-1)\left(\frac{q-1}{2}\right)\right\}\pi r^2}{(2pr+r)\left(\sqrt{3}qr+2r\right)} < \frac{\pi r^2 x}{ab} \le \frac{\left\{p\left(\frac{q+1}{2}\right)+(p-1)\left(\frac{q-1}{2}\right)\right\}\pi r^2}{2pr\left\{\sqrt{3}qr+\left(2-\sqrt{3}\right)r\right\}}$$

$$\frac{(2pq-q+1)\pi}{2(2p+1)(\sqrt{3}q+2)} < \frac{\pi r^2 x}{ab} \le \frac{(2pq-q+1)\pi}{4p(\sqrt{3}q+2-\sqrt{3})}$$

これによって得られた式の下限を取る式と最大値を取る式を$f(p,q)$とおき，最大値と下限をそれぞれ求めたところ，以下の結果が得られた。

$$45.3\% < \frac{(2pq-q+1)\pi}{4p\left(\sqrt{3}q+2-\sqrt{3}\right)} \le 90.5\%$$

$$28.3\% < \frac{(2pq-q+1)\pi}{2(2p+1)(\sqrt{3}q+2)} \le 90.5\%$$

B.　④かつqが偶数であるとき，

円の個数は　$x=p\cdot\frac{q}{2}+(p-1)\cdot\frac{q}{2}$　となるので，充填率の取りうる範囲は

$$\frac{\left\{p\cdot\frac{q}{2}+(p-1)\cdot\frac{q}{2}\right\}\pi r^2}{(2pr+r)\left(\sqrt{3}qr+2r\right)} < \frac{\pi r^2 x}{ab} \le \frac{\left\{p\cdot\frac{q}{2}+(p-1)\cdot\frac{q}{2}\right\}\pi r^2}{2pr\left\{\sqrt{3}qr+\left(2-\sqrt{3}\right)r\right\}}$$

$$\frac{(2pq-q)\pi}{2(2p+1)(\sqrt{3}q+2)} < \frac{\pi r^2 x}{ab} \le \frac{(2pq-q)\pi}{4p(\sqrt{3}q+2-\sqrt{3})}$$

この式の最大値を取る式と下限を取る式の範囲は，

$$39.3\% < \frac{(2pq-q)\pi}{4p(\sqrt{3}q+2-\sqrt{3})} \le 90.5\%$$

$$28.3\% < \frac{(2pq-q)\pi}{2(2p+1)(\sqrt{3}q+2)} \le 90.5\%$$

C.　⑤であるとき，

円の個数は$x=pq$　となるので，充填率の取りうる範囲は

$$\frac{\pi r^2 pq}{(2pr+2r)\left(\sqrt{3}qr+2r\right)} < \frac{\pi r^2 x}{ab} \le \frac{\pi r^2 pq}{(2pr+r)\left\{\sqrt{3}qr+\left(2-\sqrt{3}\right)r\right\}}$$

$$\frac{\pi pq}{2(2p+1)(\sqrt{3}q+2)} < \frac{\pi r^2 x}{ab} \le \frac{\pi pq}{(2p+1)(\sqrt{3}q+2-\sqrt{3})}$$

この式の最大値を取る式と下限を取る式の範囲は，

$$52.3\% < \frac{\pi pq}{(2p+1)\left(\sqrt{3}q+2-\sqrt{3}\right)} \leq 90.5\%$$

$$21.0\% < \frac{\pi pq}{2(2p+1)(\sqrt{3}q+2)} \leq 90.5\%$$

7-2. 単純構造

六方構造と同じ条件で, 図 4 のように円を詰めた時の充填率も求める。以下, この詰め方を単純構造という。

$p = \left[\frac{a}{2r}\right]$ ， $q = \left[\frac{b}{2r}\right]$ より,a,bの範囲は

$2pr \leq a < 2(p+1)r$ ， $2qr \leq b < 2(q+1)r$ となるので,

最大x個の円を詰められる面積の取りうる範囲は,

$$2pr \times 2qr \leq ab < 2(p+1)r \times 2(q+1)r$$

$$4pqr^2 \leq ab < 4(p+1)(q+1)r^2$$

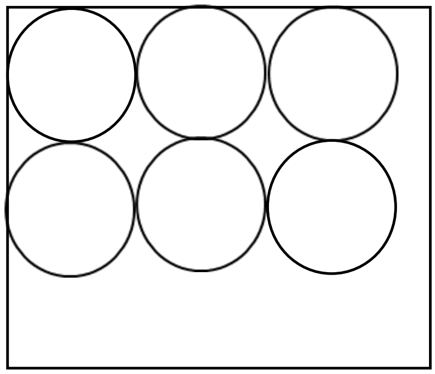


図 4　体心構造

また，このとき詰められる円の個数　$x = pq$　より，充填率の取りうる範囲は

$$\frac{\pi r^2 pq}{4(p+1)(q+1)r^2} < \frac{\pi r^2 x}{ab} \leq \frac{\pi r^2 pq}{4pqr^2}$$

$$\frac{\pi pq}{4(p+1)(q+1)} < \frac{\pi r^2 x}{ab} \leq \frac{\pi}{4}$$

この式の最大値を取る式と下限を取る式の範囲は,

$$\frac{\pi}{4} = 78.5\%$$

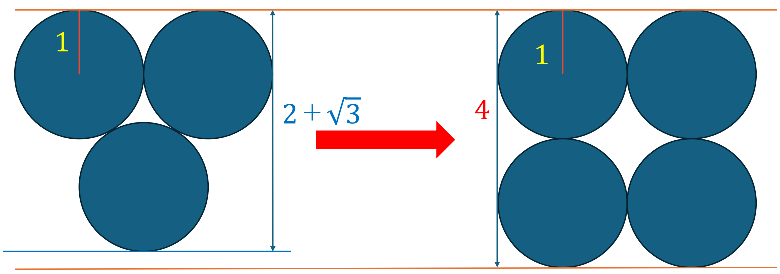
$$19.6\% < \frac{\pi pq}{4(p+1)(q+1)} \leq 78.5\%$$

正確な上限値を出すには至らなかったが，誤差を少なくして，さらに円を多く詰める方法として，次のようなものを考案した。

長方形の b の方向に許される誤差は，円の半径を1として$\sqrt{(2^2-1^2)} = \sqrt{3}$。その誤差を詰めるように下図の配置を取る。左下図が六方構造のまま，右下図が最下部を単純構造に変えた場合である。

$\sqrt{3} = 1.73$として，誤差を0.27詰めつつ，入れる円の個数を1個多くできる。

詰めた時にできた隙間の活用



$\sqrt{3} = 1.732 \ldots ≒ 1.73$とする。

差は$4-(2+\sqrt{3}) = 0.27$

図 5　円をさらに詰める工夫

8.　今後の展望
六方構造と単純構造の２通りの詰め方で，平面である長方形に大きさの等しい円を敷き詰めた時の充填率の一般化された式を作ることができた。最大値に着目すると，六方構造のほうが単純構造よりも充填率が高い。しかし，２つの式を比較して明確な関係性を出すまでには至らなかった。今後，この２つの式をグラフに表すなどして比較した結論を出していきたい。また，元々，３次元での充填率を式に出すのが目的だったが，本研究では２次元での一般化に留まった。今後は，２次元の充填率の式をもとに３次元で最初の実験のような場合での充填率を一般化させた式を求めていきたい。

9.　謝辞
本研究にあたり，弘前大学大学院理工学研究科教授　別宮耕一先生には多くの助言を賜りました。ここに感謝の意を表します。

10. 引用・参考文献
1)ジョージ・G・スピーロ　著　青木薫　訳『ケプラー予想　四百年の難問が解けるまで』新潮文庫(2014)　ｐ22

2)独立行政法人国立高等専門学校機構沼津工業高等専門学校 National Institute of Technology,(kosen)Numazu College,『1.3 六方最密充填』
https://user.numazu-ct.ac.jp/~m.kobayashi/semi/1_3/index.html

3)独立行政法人国立高等専門学校機構沼津工業高等専門学校 National Institute of Technology,(kosen)Numazu College,『1.4 立方最密充填』
https://user.numazu-ct.ac.jp/~m.kobayashi/semi/1_4/index.html

『Newton 別冊　感動する数学　図形の神秘編』ｐ110　ケプラー予想　円や球を最も密に並べる方法とは？